

بسمه تعالی

تاریخ ارسال ۹۳/۸/۶

بخش معادلات با مشتقات جزئی

سری سوم

تاریخ تحویل ۹۳/۸/۲۲

مسائل فرد جهت تحویل می باشند، ولی توصیه می شود سعی کنید تمام مسائل را برای به دست آوردن تبحر بیشتر حل کنید

با استفاده از تبدیلات فوریه مسائل زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 4e^{-5|x|}, \quad -\infty < x < \infty \quad -۱$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad -۲$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad g(x) = -۳$$

$$\begin{cases} \cos(x) & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ 0 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ or } x > \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس مسائل زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(0, t) = \begin{cases} \sin(2t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \quad -۴$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(0, t) = t, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = -۵$$

$$0, \quad u_t(x, 0) = A, \quad x \geq 0$$

با استفاده از تبدیلات مسائل زیر را حل کنید:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad u(x, 0) = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad u(0, t) = t^2, \quad -۶$$

$$u(\pi, t) = 2t, \quad t \geq 0$$

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_t(x, 0) = -۷$$

$$0 \quad u_x(0, t) = \frac{\pi}{2}, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

مسائل زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad -۸$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 1 + t, \quad t \geq 0$$

۹- با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله زیر را حل کنید:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \sin(t), \quad t > 0, \quad u_t(x, 0) = e^{-x}, \quad x > 0$$

۱۰- مطلوبست حل معادله گرما در یک میله نامتناهی که به صورت زیر داده شده است.

$$u_t = u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = e^{-|x|}$$

۱۱- مطلوبست حل مسئله زیر:

$$\nabla^2 u = x + 2y, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, \pi) = 2, \quad u(0, y) = y, \quad u(\pi, y) = \cos(y)$$

۱۲- مسئله زیر را با ذکر جزئیات حل کنید:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 4u_t + 4u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

۱۳- مسئله زیر را به کمک تبدیلات فوریه حل کنید:

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

۱۴- مسئله زیر را حل کنید:

$$u_{xx} + u_{yy} = y, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \sin(y), \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$u(x, 0) = 2x, \quad u_y(x, \pi) = \cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

۱۵- معادله موج زیر را به کمک تبدیلات فوریه حل کنید:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$$

۱۶- مسئله زیر را به کمک تبدیلات فوریه حل کنید:

$$u_t - u_{xx} = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(x, 0) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases}$$

۱۷- مطلوبست حل معادله با شرایط داده شده:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= 0, & 0 < x < \pi, & y > 0 \\ u(0, y) &= 0, & u(\pi, y) &= 2 \quad y \geq 0 \\ u(x, 0) &= -4\end{aligned}$$

۱۸- معادله لاپلاس $\nabla^2 V(x, y) = 0$, $x > 0$, $y > 0$ را با شرایط داده شده حل کنید:

$$V(x, 0) = e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad V(0, y) = e^{-y}, \quad y \geq 0$$

۱۹- مسئله زیر را با استفاده از تبدیلات فوریه حل کنید:

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= ye^{-|x|}, & -\infty < x < \infty, & 0 < y < \pi \\ u(x, 0) &= \begin{cases} x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}, & u(x, \pi) &= e^{-|x|}, & -\infty < x < \infty\end{aligned}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, y) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_y(x, y) = 0$$

۲۰- مسئله زیر را با ذکر جزئیات با روش جدایی حل کنید:

$$\frac{1}{4}u_{tt} + u_t + u - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0$$

۲۱- معادله موج را به روش دالامبر حل کنید:

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

۲۲- معادله موج زیر را با استفاده از روش دالامبر با ذکر جزئیات کامل حل کنید و مقدار $u(1, 31)$ را محاسبه نمایید.

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x(4 - x), \quad u_t(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad t \geq 0$$

۲۳- مسئله زیر را با ذکر جزئیات به روش دالامبر حل کنید:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2$$

۲۴- مسئله زیر را با روش دالامبر حل کنید:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2, \quad x \geq 0, \quad u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

معادلات موج زیر را با روش دالامبر حل کنید:

۲۵- از روش دالامبر استفاده کرده مسئله را حل کنید و سپس نشان دهید $u\left(\frac{1}{2}, 2\right) = 1 + \frac{8}{3\pi}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = \sin^3 \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

۲۶- از روش دالامبر استفاده کرده مسئله را حل کنید و سپس نشان دهید $u\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}\right) = \frac{905}{256}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2(1-x)^2, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

۲۷- از روش دالامبر استفاده کرده مسئله را حل کنید و سپس نشان دهید $u\left(\frac{3}{8}, 3\right) = -\frac{485}{1536}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = (1-x)^3, \quad u_t(x, 0) = (1-x)^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$